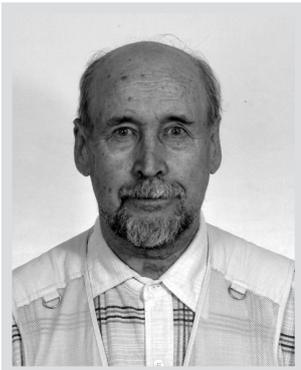


УДК 101.8

**Системно-философские аспекты несоизмеримости стороны и диагонали квадрата****Хакимов Э.М.**

Доктор философских наук, кандидат геолого-минеральных наук,  
 профессор кафедры географии и краеведения  
 Казанского (Приволжского) федерального университета

**Кузина Э.Н.**

Аспирант кафедры географии и краеведения  
 Казанского (Приволжского) федерального университета

*В этой статье рассматриваются некоторые аспекты несоизмеримости в математике древних и ее трансформация в философии. На основании разработанного авторами метода раскрываются новые геометрические и системно-философские представления о несоизмеримости и их связь с другими областями знания.*

*Ключевые слова: несоизмеримость, система, структура, модель, диалектика взаимоотношений, двойственность, преобразование, симметрия, развитие.*

Цель исследования – раскрыть новые системно-философские аспекты несоизмеримости, раскрывающие её двойственную природу и связь с гуманитарными и естественнонаучными областями знания. Для достижения указанной цели решаются следующие задачи: рассматривается возникновение несоизмеримости в математике древних и ее трансформация в философии. Осуществляется преобразование несоизмеримой стороны и диагонали квадрата в две геометрические структуры, представляющие собой системы, характеризующиеся тождественными и различными свойствами. На основании предложенной авторами методологии исследуются взаимоотношения соизмеримости и несоизмеримости, симметрии и асимметрии рассматриваемых структур, раскрывается их двойственная природа, обусловленная единством тождественных и различных свойств. На основании гипотетико-дедуктивных представлений предлагается ряд аксиом, разрешающих ряд противоречий, возникающих в процессе взаимоотношений указанных структур, и расширяющих представления о несоизмеримо-

сти, вводя последние в сферу системного анализа и философии. Рассматривается ряд системно-философских аспектов несоизмеримости, полученных в результате исследования авторов.

Открытие несоизмеримости стороны и диагонали квадрата, принадлежит Пифагору, величайшему математику и ученому, занимающему достойное место в истории мировых философско-религиозных систем, наряду с такими мыслителями как Заратуштра, Джин Махавирой, Будда, Кун Фуцзы и Лао Цзы [1, с. 8]. Для математиков древней Греции, достигшей больших успехов, это стало потрясением, так как открытие несоизмеримости, по мнению С.С. Кутателидзе, нанесло серьезный удар по античной математике. Последняя в поисках выхода из сложившейся ситуации обратила внимание на геометрию, позволившую представить «отношения, невыразимые с помощью арифметических чисел и отношений», на основании теории пропорций Евдокса Книдского и метода исчерпывания, в качестве нового средства «изучения сложных форм несоизмеримости с помощью беспредельного уменьшения остатков (античный вариант

теории пределов» [2, с. 40]. Дальнейшая эволюция представлений о несоизмеримости оказалась связанной с развитием евклидовой геометрии и в целом с развитием всей математики.

Несоизмеримость, по-видимому, была известна в древнем Египте и Вавилоне. Однако настоящее свое оформление она получает в философской школе – Пифагорейском союзе или Кротонском братстве, основанном Пифагором в городе Кротоне на юге Италии. Личность Пифагора и его научные знания, достигнутые им и его учениками, оказали в последующем влияние не только на развитие математики, но и на развитие науки и культуры. Как пишет В.И. Яковлев, Пифагор и его ученики «предприняли попытку создания своей философии естествознания (натурфилософии), дающей объяснение всего происходящего во Вселенной». При этом сущность всех вещей они сводили к числам [3, с. 52]. Деятельность школы Пифагора заложила основы греческой алгебры, арифметики, геометрии, космологии. Г.М. Идлис, анализируя пифагорейское космологическое учение, пишет: «Пифагор и его последователи, исходя из идеи числовой и геометрической гармонии мира, но видя их в осязаемой гармонии геометрически совершенных – геометрических тел и в их гармоничных (не нарушающих установленного порядка) движениях основу музыкальной гармонии, считали астрономию музыкой равномерно вращающихся небесных сфер...» [4, с. 123]. Культурное, научное значение пифагореизма основано «на единстве синтеза мистики и рационального мышления, предлагающего совершенный образ жизни» [5, с. 13]. Исходя из изложенного, несоизмеримость, как и другие научно эстетические, культурные и религиозные ценности великого математика, унаследованные нами, должна получить дальнейшее развитие в плане общенаучного и философского знания.

В философии тема несоизмеримости затрагивается в работе Т. Куна «Структура научных революций» [6]. Г.И. Браун в статье «Переосмысление несоизмеримости» показывает, что Т. Кун в ранних работах отрицал «существование языка наблюдения, полагая, что любое наблюдение является теоретически перегруженным, поскольку его результаты необходимо выразить на языке некоторой теории. Из этого он делал вывод о невозможности рационального сравнения конкурирующих теорий». Позже Т. Кун приходит к выводу, что несоизмеримость представляет проблему для определенных форм реализма. Последнее приводит его к отказу от более ранних представлений несоизмеримости [7, с. 62-66]. Проблема несоизмеримости также затрагивается в работах Э. Оберхейма. Т.А. Карелина и В.А. Яковлев анализируя статью «Оберхейм Э. к историческим истокам современного понятия несоизмеримости: Пол Фейерабенд критикует концептуальный консерватизм» [8, с. 67], отмечают, что автор

на фоне краткого анализа исторического происхождения понятия несоизмеримости в работах Т. Куна, основное внимание уделяет менее известным исследованиям этого понятия П. Фейерабендом. Как показывает Э.К. Оберхейм, в независимых публикациях обоих авторов в начале 70-х гг. прошлого века Т. Кун и П. Фейерабенд «использовали термин «несоизмеримый», чтобы описать некоторые виды радикальных теоретических переходов в ходе развития науки». Т. Кун вначале использовал понятие несоизмеримости для обозначения методологических, наблюдательных, и концептуальных различий между последовательными научными парадигмами. Несколько позднее он «использовал эту идею для утверждения, что имеются ошибки перевода, связанные с различиями в таксономических структурах последовательных научных теорий» [8, с. 68].

Развитие Т. Куном и П. Фейерабендом понятия неизмеримости привлекло внимание ряда исследователей к данной проблеме [9-12 и др.]. Вопросам взаимоотношений онтологических и гносеологических аспектов несоизмеримости теорий Т. Куна и П. Фейерабенда посвящена работа С.В. Борисова. Используя критические замечания Х. Патнема относительно исследований Т. Куна и П. Фейерабенда, автор отмечает, что эта критика слишком поверхностна и «сводит данный тезис лишь к прагматике языка и совсем не обращает внимания на его онтологические и гносеологические основания» [12, с. 126]. Резюмируя, он подчеркивает, «что если несоизмеримые с гносеологической точки зрения теории имеют одно онтологическое основание, то «тезис несоизмеримости» будет направлять нас на поиск их общего онтологического корня. Если же объектом нашего исследования будут онтологически несоизмеримые теории, то нам поможет их лучше понять свойственный им специфический стиль рассуждений». Данный стиль по автору должен иметь определенное единство, опирающееся «не на узко-предметный, парадигмальный, а на мета-предметный характер» [12, с. 134].

Исходя из общенаучной природы исследуемого нами феномена, раскрытие его системно-философского содержания требует использования системной методологии научного анализа, связывающей в единый комплекс геометрию, теорию чисел, понятия категориального характера, а также философские принципы и законы. Кроме этого, оказалось необходимым преобразование исходных оснований несоизмеримости, представленных стороной и диагональю квадрата евклидовой геометрии, в более сложные объекты, которые сохранили бы свойство несоизмеримости. Данная операция, проведенная авторами, позволила рассмотреть диалектику взаимоотношений соизмеримости и несоизмеримости на общенаучном уровне и получить новые данные по исследуемой проблеме.

Одним из первых оснований несоизмеримости выступают отношения стороны и диагонали квадрата (а также взаимоотношения частей целого ряда геометрических фигур) [5, с. 76-78]. Числовые значения сторон и диагоналей квадрата определяются по теореме Пифагора  $n^2 = m^2 + g^2$  при  $m = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ m$  и  $g = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ g$ . Из формулы следует  $n^2 = m^2 + g^2$ . Гипотенуза  $n$  в прямоугольном треугольнике равна корню квадратному из суммы квадратов катетов. В случае  $m = g$  имеем стороны квадрата, в случае  $m \neq g$  – прямоугольник. Другими геометрическими условиями несоизмеримости выступают параллельность сторон квадратов и их пересечение под углом  $90^\circ$ . Диагонали квадрата пересекаются со сторонами квадрата под углами  $45^\circ$  и  $135^\circ$ . Эти геометрические основания позволили преобразовать взаимоотношения стороны и диагонали квадрата евклидовой геометрии во взаимоотношения двух более сложных геометрических структур, характеризующихся тождеством и различием строения и свойств, что позволило сохранить в их взаимоотношениях, как несоизмеримость, так и соизмеримость их частей. Первая структура представляет собой пересечение под прямым углом множеств параллельных прямых (ПП), расстояния между которыми равны единице. Вторая структура, также строится из пересекающихся под прямым углом параллельных прямых, расстояния между которыми равны отрезкам, измеряемым иррациональной величиной  $\sqrt{2}$ . Параллельные прямые первой и второй структуры ориентированы по отношению друг к другу под углами  $45^\circ$  и  $135^\circ$ . Первая структура названа нами сетью А, вторая – сетью Б. В результате данных операций несоизмеримые взаимоотношения стороны и диагонали и квадрата мы преобразовали в отношения двух геометрических структур, сохранивших несоизмеримость, но также обогащенных новыми взаимоотношениями, связанными с соизмеримостью новых элементов данных структур.

Данный методологический прием позволил нам использовать при анализе несоизмеримости диалектику взаимоотношений тождественного и различного и других категорий [13; с. 30; 14, с. 145-155]. Тождественными в сетях А и Б выступили параллельность прямых, их пересечение под прямыми углами, наличие неограниченного числа квадратов (сходство геометрических структур, порождаемых в данных сетях). В качестве различия выступили разные расстояния между ПП указанных сетей, измеряемые, в одном случае, рациональными отрезками  $n$ , а в другом – иррациональными отрезками  $n\sqrt{2}$ , различие в размерах площадей квадратов, а также различие пространственной ориентации ПП указанных сетей. Наличие квадратов в обеих сетях позволило включить в анализ взаимоотношений сетей А и Б элементы симметрии – оси четвертого и второго порядка, плоскости и центры симме-

трии ( $L^4, L^2, P, C^0$ ). Единство тождественного и различного в двух системах, позволило рассмотреть и геометрически вычленивать противоречие, лежащее в основе развития взаимодействующих структур и пути разрешения этого противоречия. В качестве гносеологических аспектов можно рассмотреть теорию несоизмеримости, развиваемую на основе разрешения противоречия, лежащего в самой несоизмеримости и раскрывающего скрытые до этого сущности и тенденции. Чтобы осуществить этот процесс, необходимо опираться на диалектику взаимоотношений соизмеримости и несоизмеримости, обогащенную идеей о двойственной природе их обобщенной модели – гибридной сети (ГС), сложной пространственной структуры, образованной наложением сети Б на сеть А. В качестве гносеологического аспекта нами также рассматриваются гипотетико-дедуктивные представления, выраженные в виде аксиом несоизмеримости и язык формального описания преобразования квадратов, рассматриваемый как элемент моделирования развития взаимоотношений соизмеримых и несоизмеримых структур. Данные аксиомы генетически связаны с аксиомами теории иерархии [13, с. 43-45; 15, с. 141-155, 175-180].

**Одной из первых аксиом несоизмеримости выступает утверждение о невозможности построения из несоизмеримых отрезков  $n$  и  $n\sqrt{2}$  сетей А и Б фигур с равными площадями.** Однако, в силу существования тождественных элементов симметрии у квадратов сетей А и Б, при преобразовании  $n^2$  в  $n^2(\sqrt{2})^2$  площадь  $n^2$  удваивается. Выявленное удвоение площадей преобразуемых квадратов сохраняется при последовательном росте числа преобразований квадратов. В связи с выявленной закономерностью нами предложен алгоритм преобразования квадратов с рационально измеряемыми сторонами в квадраты с иррационально измеряемыми сторонами и преобразование последних в квадраты с рационально измеряемыми сторонами с последовательным удвоением их площадей.

$$1 (\sqrt{2})^2\ 2^2\ 2^2(\sqrt{2})^2\ 2^4\ 2^4(\sqrt{2})^2\ 2^6 \\ 2^6(\sqrt{2})^2\ \dots\ 2^k(\sqrt{2})^2\ 2^{k+2}\ 2^{k+2}(\sqrt{2})^2 \quad (1)$$

Алгоритм 1 описывает преобразования противоположностей друг в друга – квадратов, стороны которых измеряются рационально исчисляемыми отрезками, в квадраты, стороны которых измеряются иррационально измеряемыми отрезками, и наоборот. Данное преобразование осуществляется на основании пространственного поворота квадратов на  $45^\circ$  вокруг узла, выбранного в качестве центра симметрии. Площади преобразуемых квадратов растут в соответствии с  $2^k$ . Обратный процесс деления площадей пополам осуществляется в соответствии с формулой  $1/2^k$ . Отношение площадей преобразуемых квадратов равно  $2^k(\sqrt{2})^2 / 2^k = 1/2$ ,  $2^{k+2}/2^k (\sqrt{2})^2 = 2$ . Указанные числовые значения  $1/2$  и  $2$  являются инвариант-

ными величинами – константами преобразования квадратов.

**Вторая аксиома несоизмеримости связана с наложением узлов сетей А и Б.** Из содержания первой аксиомы следует, что **невозможно наложение всех узлов сети Б на все узлы сети А.** Однако, наличие одинаковых элементов симметрии (свойство тождественности) порождает в совмещенной гибридной сети (ГС) сетей А и Б **определенную пространственную закономерность в отношениях совмещаемых узлов.** Последняя выражается в том, что 4 узла сети Б, лежащие на серединах сторон квадрата  $1^2$  сети А, являются вершинами квадрата  $(\sqrt{2}/2)^2$  сети Б, а вершины  $12$  лежат на серединах сторон  $\sqrt{2}^2$  сети Б, который объемлет, все включенные в него квадраты  $(\sqrt{2}/2)^2$  и  $1^2$ . **В качестве условия перекрывания узлов сетей А и Б выступает требование совпадения центров симметрии квадратов, стороны которых построены из несоизмеримых отрезков.** Указанное условие требует, чтобы через сдвоенный узел ГС проходили две пары ПП, каждая пара из которых пересекается под прямым углом в точке узла ГС. Одна из пересекающихся пар ПП сети А представляет стороны квадратов, и другая пара представляет собой ПП диагоналей. Исходя из того, что ПП сетей А и Б пересекаются под углами  $45^\circ$  и  $135^\circ$ , **все прямые, пересекающиеся в узле ГС, образуют 8 лучей по  $45^\circ$ .**

Утверждение второй аксиомы не позволяет перекрывать узлы сети А узлами сети Б и наоборот. Возникает противоречие между несоизмеримыми и соизмеримыми величинами. Разрешение противоречия осуществляется на основании **содержания третьей аксиомы, утверждающей: Наложение узлов сетей А и Б может осуществляться лишь при изменении масштабов сетей А и Б, образующих гибридную сеть.** При этом разрешение противоречия осуществляется двумя путями. Первый путь связан с уменьшением масштабов обеих сетей, ячейки-квадраты уменьшают длины своих сторон в соответствии с константами преобразования  $1/2^k$  и  $1/2^k\sqrt{2}$ . Второй – связан с увеличением масштабов сетей А и Б в соответствии с удвоением длины сторон квадратов сетей А и Б и увеличением масштабов сети последних. Особенностью первого пути является то, что выбор одного узла в сети А в качестве центра симметрии и наложение на него узла сети Б сети А порождает новые узлы пересечения, пространственное положение которых в гибридной сети являются координатами вершин и середин сторон последовательно вложенных друг в друга квадратов, в соответствии с алгоритмом преобразования квадратов, стороны которых несоизмеримы (1). Второй путь связан с содержанием **четвертой аксиомы, утверждающей, что каждый квадрат  $n^2$  и  $(n\sqrt{2})^2$  является исходной ячейкой, сети нового масштаба** [13, с. 85, 86; 14, с. 184]. В связи

с существованием множества подобных квадратов **утверждается существование множества сетей, аналогичным сетям А и Б.** Последнее позволило выявить множество соизмеримо-несоизмеримых пар квадратов, диагональ одного из которых, является стороной другого квадрата, и наоборот – когда сторона одного квадрата является диагональю другого квадрата, и эти квадраты преобразуются друг в друга в соответствии с алгоритмом (1).

Рассматриваемые нами два пути разрешения противоречия между соизмеримостью и несоизмеримостью связаны между собой диалектикой взаимоотношений объединения и разделения [16, с. 113-116]. Каждый шаг деления стороны квадрата, имеет обратный себе шаг объединения (удвоения) стороны квадрата, и эти процессы, являющиеся частью преобразования квадратов, описываются числовыми отношениями. Без этой связи противоположностей из единой наследственной информации, заключенной в молекуле наследственности ДНК, не мог бы развиваться организм, передающий информацию о своем строении и функционировании следующим поколениям.

Проведенное нами исследование позволяет с новых позиций рассмотреть системно-философские аспекты несоизмеримости, используя, по С.В. Борису [12], онтологические и гносеологические основания в качестве методологического инструмента анализа феномена несоизмеримости. В качестве онтологического основания последнего выступает фундаментальная роль несоизмеримости в развитии объектов природы, социально-организованных систем, общества и мыслительной деятельности человека. Что касается гносеологического основания, несоизмеримость, выступая в качестве противоречия, открывает простор для поисков и разработки методов разрешения последнего. Её системно-философская природа выражается в диалектике взаимоотношений соизмеримости и несоизмеримости, порождающей двойственную природу несоизмеримости, объединяющую в себе единство противоположностей – тождества и различия, дискретности и непрерывности, симметрии и асимметрии. Из системно-философской природы исследуемого нами феномена следует, что несоизмеримость, как и соизмеримость, обладает относительной природой. Следуя традиции Ю.А. Урманцева, создателя общей теории систем (ОТСУ) [15, с. 259], мы отмечаем, что несоизмеримость может быть максимально или минимально несоизмеримой, несоизмеримо-соизмеримой, соизмеримо-несоизмеримой, а также максимально или минимально соизмеримой.

Знание о соотношении соизмеримости – несоизмеримости служит методологическим инструментом, интегрирующим знания разных наук, и внедряющим их в другие научные сферы.

*Литература:*

1. Пифагор. Золотой канон. Фигуры эзотерики. Издание подготовлено А.К. Шапошниковым. – М.: Изд. «Эксмо». 2003. – 448 с.
2. Кутателадзе С.С. Александров из древней Эллады. // Математические структуры и моделирование. – 2012. – Вып. 25. – С. 25-39.
3. Яковлев В.И. Математические начала. – М.; Ижевск: Изд-во Dinamika 2005. – 222 с.
4. Идлис Г.М. Революции в астрономии физике и космологии. – М.: Изд-во Наука, 1985. – 232 с.
5. Альсина К. Мир математики. Секта чисел. Теорема Пифагора. – М.: Де Агостини, 2014. – 152 с.
6. Кун Т. Структура научных революций / Сост. В. Ю. Кузнецов. – М.: АСТ 2001. – 608 с.
7. Микаберидзе А.И., Ремезова И.И., Яковлев В.А. Браун Г.И. Переосмысление несоизмеримости // Социальные и гуманитарные науки. Отечественная и зарубежная литература. Серия 3: Философия. – 2006. – № 3. – С. 62-66.
8. Карелина Т.А., Яковлев В.А. Оберхейм Э. к историческим истокам современного понятия несоизмеримости: Пол Фейерабенд критикует концептуальный консерватизм // Социальные и гуманитарные науки. Отечественная и зарубежная литература. Серия 3: Философия. Реферативный журнал. – 2006. – № 3. – С. 67-73.
9. Мазилев В.А. принцип соизмеримости в психологии. // Вестнику КГУ им. Н.А. Некрасова. – 2013. – Т. 19. – С. 28-32.
10. Мамчур Е.А. Проблема выбора теории. – М.: Наука, 1975.
11. Головкин Н.В. Натурализация эпистемологии и основные аргументы против научного реализма. // Вестник НГУ. Серия: Философия. – 2009. – Т. 7. – С. 9–14.
12. Борисов С.В. Онто-гносеологическое значение «Тезиса несоизмеримости теорий Куна – Фейерабенда» для истории философии науки. // Вестник Челябинского государственного университета. – 2012. – № 15 (269). – Философия. Социология. Культурология. – Вып. 24. – С. 126- 134.
13. Хакимов Э.М. Моделирование иерархических систем (Теоретические и методологические аспекты). – Казань: КГУ, 1986. – 160 с.
14. Хакимов Э.М. Диалектика иерархии и неиерархии в философии и научном знании. – Казань: Изд-во ФЭН АН РТ, 2007. – 288 с.
15. Урманцев Ю.А. Общая теория систем в доступном изложении. – М.: Изд-во Dinamika, 2014. – 408 с.
16. Хакимов Э. М., Хабибуллина Ю.И. Деление – объединение уровней организации, циклы, тетрады и этапы деления – объединения. // Развитие и динамика иерархических (многоуровневых) систем. (Теоретические и прикладные аспекты). Сб. статей по материалам международной научно-практической конференции. – Казань, 2010. – С. 113–119.

**System and Philosophical Aspects of Incommensurability of Square Side and Diagonal**

*E.M. Khakimov, E.N. Kuzina  
Kazan (Volga Region) Federal University*

*The paper deals with some aspects of incommensurability in ancient mathematics and its transformations in philosophy. Based on the methods worked out by the authors, new geometric and system and philosophical ideas on incommensurability and their connection with other scientific fields are revealed.*

*Key words: incommensurability, system, structure, model, dialectics of relations, duality, transformation, symmetry, development.*

